УДК 514.76

К. В. Полякова

СВЯЗНОСТЬ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ РАССЛОЕНИЯ РЕПЕРОВ МНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрено касательное расслоение к расслоению линейных реперов гладкого многообразия. Построены скобки касательных векторов этого расслоения. Приведено координатное представление векторов неголономного репера. Построены горизонтальные и вертикальные кривизны, кручения и ковариантные производные в однородной связности.

This paper focuses on the tangent bundle to the linear frame bundle of a smooth manifold. Brackets of the tangent vectors of this bundle are constructed. A coordinate representation of the non-holonomic frame vectors is produced. Horizontal and vertical curvatures, torsions, and covariant derivatives are constructed in a homogeneous connection.

Ключевые слова: касательное расслоение 2-го порядка, горизонтальные, вертикальные и смешанные кривизны и кручения, горизонтальные и вертикальные ковариантные производные.

Key words: 2nd order tangent bundle, horizontal, vertical and mixed curvatures and torsions, horizontal and vertical covariant derivatives.

Структурные уравнения расслоения $L(X_m)$ касательных линейных реперов на гладком многообразии X_m имеют вид [3]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \; d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{1}$$

причем $\omega^i_{[jk]} \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\, \omega^i)$; $i, j, k, ... = \overline{1, m}$. Продолжим уравнения (1):

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}.$$

Выражение для дифференциала точки A расслоения касательных линейных реперов $L(X_m)$ запишем в виде [4]

$$dA = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i. \tag{2}$$

Совокупность векторов 1-го порядка $e = \{e_i, e^k_j\}$ образует допустимый репер [5] касательного пространства $\mathrm{T_A} L(X_m) = \mathrm{span}(e_i, e^k_j)$ к расслоению $L(X_m)$ в точке A, $\dim T_A L(X_m) = m + m^2$. Этот репер является двойственным к кореперу $\omega = \{\omega^i, \omega^j_i\}$: $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$, $\omega^i(e^k_j) = 0$, $\omega^i_j(e_k) = 0$, $\omega^i_j(e^k_l) = \delta^i_l \delta^k_j$. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m и, следовательно, слой расслоения $L(X_m)$. Таким образом, касательное пространство $T_A L(X_m)$ содержит вертикальное пространство $V_A = [e^j_i]$, касательное к слою в точке A.

Формы инвариантного корепера $\omega=\{\omega^i,\omega^j_i\}$ в натуральном корепере $\{dx^i,dx^k_j\}$ выражаются по формулам [3]: $\omega^i=x^i_j dx^j$, $\omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}=$ $=-\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k$, где $\left(\overset{*}{x}{}^i_j\right)$ — матрица, обратная к матрице $\left(x^j_i\right)$. Векторы репера $e=\{e_i,e^k_j\}$ в натуральном репере $\{\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i},\partial^k_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j_k}\}$ рассчитываются по формулам: $e_i=\overset{*}{x}{}^j_i\partial_j+x^k_{ji}\,e^j_k$, $e^i_j=-x^i_k\partial^k_j$. В матричном виде имеем

$$\begin{pmatrix}\omega^i\\ \omega^k_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^i_l & 0\\ -x^k_{js}x^s_l & -\delta^k_p\overset{*}{x}{}^q_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^l\\ dx^p_q\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}e_i & e^k_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_l & \partial^p_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overset{*}{x}{}^l_i & 0\\ -x^q_{si}x^s_p & -\delta^q_j x^k_p\end{pmatrix}.$$

Для вертикальных векторов также справедливо разложение: $e^i_j=\overset{*}{x}{}^k_j\,\overset{*}{\partial}{}^i_k$, где $\overset{*}{\partial}{}^i_k=\dfrac{\partial}{\partial\overset{*}{x}{}^k_i}$.

Из деривационной формулы (2) видим, что dA можно рассматривать как векторнозначную 1-форму со значениями в пространстве $T_A L(X_m)$, то есть тангенциальнозначную 1-форму. Обозначим множество всех тангенциальнозначных форм со значениями в пространстве $T_A L(X_m)$ через $\Omega^1_1=\Omega_1(T_A L(X_m))$. В общем случае, $\Omega^p_q=\Omega_q(T^p_A LX_m)$ — множество всех q-форм со значениями в касательном пространстве $T^p_A LX_m$ p-го порядка.

Случаи $p=0$ и $q=0$ не исключаются из рассмотрения, в частности, $\Omega^0_1=\Omega_1(R)$ — множество всех обычных дифференциальных 1-форм; $\Omega^1_0=\Omega_0(T_A L(X_m))$ — множество всех тангенциальнозначных 0-форм (касательных векторов), то есть $\Omega^1_0=T_A LX_m$.

Форма смещения [1, с. 117] dA соответствует тождественному преобразованию [2; 6] касательного пространства $\mathrm{T_A}L(X_m)$, то есть для базисных векторов (вертикальных e^k_l и невертикальных e_j) и произвольного касательного вектора $u=u^i e_i+u^i_j e^j_i$ имеем $dA(e_j)=e_j$, $dA(e^k_l)=e^k_l$, $dA(u)=u$.

Дифференцируя форму смещения (2) внешним образом и разрешая по лемме Картана

$$\Omega^1_1=\Omega_1(T_A LX_m)\xrightarrow{d}\Omega_2(dT_A LX_m)\xrightarrow{\text{лемма Картана}}\Omega^2_1=\Omega_1(T^2_A LX_m),$$

получим, что невертикальные e_i и вертикальные e^k_j [4]:

$$de_i-e_j\omega^j_i-e^j_k\omega^k_{ji}=e_{ij}\omega^j+e^k_{ij}\omega^j_k,\ de^j_i+e^k_i\omega^j_k=e^j_{ik}\omega^k+e^{jl}_{ik}\omega^k_l, \tag{3}$$

причем для совокупности векторов 2-го порядка $e'=\{e_{ij},e^k_{ij},e^j_{ik},e^{jl}_{ik}\}$ из соприкасающегося пространства (касательного пространства 2-го порядка) $T_A^2L(X_m)$ справедливы условия симметрии: $e_{ij}=e_{ji}$, $e_{ij}^{\ k}=e_{ji}^k$, $e_{ik}^{jl}=e_{ki}^{lj}$. Таким образом, построен репер 2-го порядка $e^2=\{e,\ e'\}$ пространства $T_A^2L(X_m)$, $dim T_A^2L(X_m)=\frac{1}{2}(m^2+m)(m^2+m+3)$.

Координатное представление пфаффовых производных e' векторов репера e имеет вид

$$e_{ij}=x_{ij}^k e_k+\overset{*}{x}{}_i^l\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^k}\overset{*}{x}{}_j^k-\overset{*}{x}{}_i^l\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x_p^k}x_{sj}^k x_p^s-x_{ij}^s x_{ls}^k e_k^l-x_{li}^s x_{sj}^k e_k^l+x_{lij}^k e_k^l+x_{li}^k e_{kj}^l,$$

$$e_{ik}^j=-x_{sk}^j e_i^s-x_l^j\overset{*}{x}{}_k^s\frac{\partial^2}{\partial x_l^i\partial x^s}+x_l^j\frac{\partial^2}{\partial x_l^i\partial x_p^q}x_{sk}^q x_p^s,\ e_{ik}^{jl}=x_s^j\frac{\partial^2}{\partial x_s^i\partial x_p^k}x_p^l.$$

Дифференцируя произвольный вектор $u=u^i e_i+u_j^i e^j{}_i\in T_A L(X_m)$:

$$du=e_i du^i+e^j{}_i(du_j^i+u^k\omega_{ik}^j)+u^i(e_{ij}\omega^j+(e_{ij}^{\ k}+\delta_i^k e_j)\omega_k^j)+u_j^i(e_{ik}^j\omega^k+(e_{ik}^{jl}-\delta_k^j e_i^l)\omega_l^k).$$

Вектор u инвариантен, если $du^i=u^i{}_j\omega^j+u_j^{ik}\omega_k^j$, $du_j^i+u^k\omega_{jk}^i=u_{jk}^i\omega^k+u_{jk}^{il}\omega_l^k$.

Тогда $du=\hat{u}_i\omega^i+\hat{u}_j^i\omega_i^j$, где

$$\begin{gathered}\hat{u}_i=u^j{}_i e_j+u_{ji}^k e_k^j+u^j e_{ji}+u_j^k e_{ki}^j,\\ \hat{u}_j^i=u^{ki}_{\ j}e_k+u_{lj}^{ki}e_k^l+u^k(e_{kj}^{\ i}+\delta_k^i e_j)+u_l^k(e_{kj}^{li}-\delta_j^l e_k^i),\end{gathered}\tag{4}$$

$\hat{u}_i=\partial_{e_i}u$, $\hat{u}_j^i=\partial_{e_j^i}u$ — базисные и слоевые (вертикальные) пфаффовы производные вектора u.

При вычислении скобки $[u,v]$ будем использовать соотношение

$$[u,v]=dv(u)-du(v)=\hat{v}_i\omega^i(u)+\hat{v}_j^i\omega_i^j(u)-\hat{u}_i\omega^i(v)-\hat{u}_j^i\omega_i^j(v).$$

По условиям сопряженности базисов: $[u,v]=\hat{v}_i u^i+\hat{v}_j^i u_i^j-\hat{u}_i v^i-\hat{u}_j^i v_i^j$.

С помощью обозначений (4) приведем скобку к виду

$$\begin{gathered}[u,v]=(v^i{}_j u^j-u^i{}_j v^j+v^{ik}_{\ j}u_k^j-u^{ik}_{\ j}v_k^j+v^j u_j^i-u^j v_j^i)e_i+\\ +(v_{jk}^i u^k-u_{jk}^i v^k+v_{jl}^{ik}u_k^l-u_{jl}^{ik}v_k^l-v_k^i u_j^k+u_k^i v_j^k)e_i^j.\end{gathered}$$

В частности, скобка вертикальных векторов

$$[\overset{1}{v},\overset{2}{v}]=(\overset{2}{v}{}_{jl}^{ik}\overset{1}{v}{}_k^l-\overset{1}{v}{}_{jl}^{ik}\overset{2}{v}{}_k^l-\overset{2}{v}{}_k^i\overset{1}{v}{}_j^k+\overset{1}{v}{}_k^i\overset{2}{v}{}_j^k)e_i^j\ -$$

вертикальный вектор, и вертикальное распределение инволютивно.

Рассмотрим формы

$$\overline{\omega}_{jk}^i=\omega_{jk}^i-\Gamma_{jkl}^i\omega^l-\Gamma_{jkl}^{i\ s}\omega_s^l\tag{5}$$

и приведем их внешний дифференциал к виду

$$\begin{gathered}d\overline{\omega}_{jk}^i=\overline{\omega}_{jk}^l\wedge\omega_l^i-\overline{\omega}_{lk}^i\wedge\omega_j^l-\overline{\omega}_{jl}^i\wedge\omega_k^l+\\ +\omega^l\wedge(\Delta\Gamma_{jkl}^i-\Gamma_{jkp}^{i\ s}\omega_{sl}^p+\omega_{jkl}^i)+\omega_s^l\wedge(\Delta\Gamma_{jkl}^{i\ s}-\Gamma_{jkl}^{i\ p}\omega_p^s).\end{gathered}\tag{6}$$

Формы (5) задают связность с объектом $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}^i_{jkl}, \mathcal{T}^{i\ s}_{jkl}\}$ в касательном расслоении $TL(X_m)$, база $L(X_m)$ которого сама является расслоением.

Из (6) следуют уравнения

$$\Delta\mathcal{T}^i_{jkl} - \mathcal{T}^{i\ s}_{jkp}\omega^p_{sl} + \omega^i_{jkl} = \mathcal{T}^i_{jkls}\omega^s + \mathcal{T}^{i\ \ s}_{jklp}\omega^p_s,\ \Delta\mathcal{T}^{i\ s}_{jkl} = \mathcal{T}^{i\ s}_{jklp}\omega^p + \mathcal{T}^{i\ sq}_{jklp}\omega^p_q,$$

где, например, $\Delta\mathcal{T}^i_{jkl} = d\mathcal{T}^i_{jkl} + \mathcal{T}^s_{jkl}\omega^i_s - \mathcal{T}^i_{skl}\omega^s_j - \mathcal{T}^i_{jsl}\omega^s_k - \mathcal{T}^i_{jks}\omega^s_l$.

Подставляя последние дифференциальные уравнения в уравнения (6), получим структурные уравнения

$$\begin{gathered} d\overline{\omega}^i_{jk} = \overline{\omega}^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \overline{\omega}^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \overline{\omega}^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \\ + \tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i}_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s + \tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i\ sq}_{jklp}\omega^l_s \wedge \omega^p_q + \mathcal{R}^{\ i\ \ q}_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s_p, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i}_{jkls} = \mathcal{T}^i_{jk[ls]}$ — *горизонтальная кривизна* $\overset{\mathrm{h}}{\mathcal{R}}$, $\tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i\ sq}_{jklp} = \mathcal{T}^{i\left[sq\right]}_{jk\left[lp\right]}$ — *вертикальная кривизна* $\overset{\mathrm{v}}{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}^{\ i\ \ q}_{jkls} = \mathcal{T}^{i\ \ p}_{jkls} - \mathcal{T}^{i\ s}_{jklp}$ — *смешанная кривизна* $\overset{\mathrm{hv}}{\mathcal{R}}$.

Воспользуемся внешним ковариантным дифференциалом в (7), получим $D\overline{\omega}^i_{jk} = \Omega^i_{jk}$, где $D\overline{\omega}^i_{jk} = d\overline{\omega}^i_{jk} + \omega^i_l \wedge \overline{\omega}^l_{jk} - \omega^l_j \wedge \overline{\omega}^i_{lk} - \omega^l_k \wedge \overline{\omega}^i_{jl}$ — внешний ковариантный дифференциал; $\overset{h}{\Omega}{}^i_{jk} = \tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i}_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s$, $\overset{v}{\Omega}{}^i_{jk} = \tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i\ sq}_{jklp}\omega^l_s \wedge \omega^p_q$, $\overset{hv}{\Omega}{}^i_{jk} = \mathcal{R}^{\ i\ \ p}_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s_p$ — формы горизонтальной, вертикальной и смешанной кривизн; $\Omega^i_{jk} = \tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i}_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s + \tfrac{1}{2}\mathcal{R}^{\ i\ sq}_{jklp}\omega^l_s \wedge \omega^p_q + \mathcal{R}^{\ i\ \ q}_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s_p$ — формы кривизны.

Внося формы (5) в структурные уравнения (1_2), получим: $D\omega^i_j = \vartheta^i_j$, где $D\omega^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k - \omega^k \wedge \overline{\omega}^i_{jk}$ — внешний ковариантный дифференциал, $\vartheta^i_j = \overset{h}{\vartheta}{}^i_j + \overset{hv}{\vartheta}{}^i_j$ — формы кручения, $\overset{h}{\vartheta}{}^i_j = \tfrac{1}{2}T^{\ i}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l$, $\overset{hv}{\vartheta}{}^i_j = T^{\ i\ s}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l_s$ — формы горизонтального и смешанного кручений; $T^{\ i}_{jkl} = \mathcal{T}^i_{jkl} - \mathcal{T}^i_{jlk}$ — объект горизонтального кручения, $T^{\ i\ s}_{jkl} = \mathcal{T}^{i\ s}_{jkl}$ — объект смешанного кручения. Компоненты объекта кручения $T = \{T^{\ i}_{jkl},\ T^{\ i\ s}_{jkl}\}$ удовлетворяют сравнениям $\Delta T^{\ i}_{jkl} \cong 2\Gamma^{i\ \ s}_{j[k|p|}\omega^p_{|s|l]}$, $\Delta T^{\ i\ s}_{jkl} \cong 0 \pmod{\omega^i, \omega^k_j}$.

Для форм кручения $\vartheta^i_j = \overset{h}{\vartheta}{}^i_j + \overset{hv}{\vartheta}{}^i_j$ и кривизны Ω^i_{jk} получены аналоги тождеств Бьянки в бескоординатном индексном представлении

$$\Delta\vartheta^i_j = \Omega^i_{jk} \wedge \omega^k,\ \Delta\Omega^i_{jk} + \omega^s \wedge (\overline{\omega}^l_{jk} \wedge \overline{\omega}^i_{ls} - \overline{\omega}^i_{lk} \wedge \overline{\omega}^l_{js} - \overline{\omega}^i_{jl} \wedge \overline{\omega}^l_{ks}) = \overline{\omega}^l_{jk} \wedge \vartheta^i_l - \overline{\omega}^i_{lk} \wedge \vartheta^l_j - \overline{\omega}^i_{jl} \wedge \vartheta^l_k,$$

где имеет вид $\Delta\vartheta^i_j = d\vartheta^i_j + \ + \vartheta^k_j \wedge \omega^i_k - \vartheta^i_k \wedge \omega^k_j$.

Значения 2-форм кручения $\overset{h}{\vartheta}{}^i_j$, $\overset{hv}{\vartheta}{}^i_j$ и кривизны $\overset{h}{\Omega}{}^i_{jk}$, $\overset{v}{\Omega}{}^i_{jk}$, $\overset{hv}{\Omega}{}^i_{jk}$ на вертикальных и невертикальных векторах выражаются по формулам

$$\overset{h}{\vartheta}{}^i_j(e^k_l, e^p_q) = 0\,,\ \overset{h}{\vartheta}{}^i_j(e_k, e_l) = T^{\,i}_{jkl}\,;\ \overset{hv}{\vartheta}{}^i_j(e^k_l, e^p_q) = 0\,,\ \overset{hv}{\vartheta}{}^i_j(e_k, e^s_l) = T^{\,i\ s}_{jkl}\,;$$

$$\overset{h}{\Omega}{}^i_{jk}(e^s_l, e^p_q) = 0\,,\ \overset{h}{\Omega}{}^i_{jk}(e_l, e_s) = \mathcal{R}^{\,i}_{jkls}\,;\ \overset{v}{\Omega}{}^i_{jk}(e^s_l, e^p_q) = \mathcal{R}^{\,i\ sp}_{jklq}\,,\ \overset{v}{\Omega}{}^i_{jk}(e_l, e_s) = 0\,;$$

$$\overset{hv}{\Omega}{}^i_{jk}(e^s_l, e^p_q) = \overset{hv}{\Omega}{}^i_{jk}(e_l, e_q) = 0\,,\ \overset{hv}{\Omega}{}^i_{jk}(e_l, e^q_p) = \mathcal{R}^{\,i\ q}_{jklp}\,.$$

Внесем формы (5) в ($З_1$) для невертикальных векторов и получим

$$\overset{hv}{\nabla} e_i = \omega^j \overset{h}{\nabla}_j e_i + \omega^k_j \overset{v}{\nabla}{}^j_k e_i\,,$$

где $\overset{hv}{\nabla} e_i = de_i - e^j_k \overline{\omega}^k_{ji}$ — ковариантный дифференциал невертикальных векторов в связности $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}^{\,i}_{jkl}, \mathcal{T}^{\,i\ s}_{jkl}\}$; $\overset{h}{\nabla}_j e_i = e_{ij} + e^l_k \mathcal{T}^k_{lij}$ — горизонтальные ковариантные производные в связности $\mathcal{T}$, $\overset{v}{\nabla}{}^j_k e_i = e^j_{ik} + \delta^j_i e_k + e^l_s \mathcal{T}^{s\,j}_{lik}$ — вертикальные ковариантные производные в связности $\mathcal{T}$.

По аналогии уравнения ($З_2$) для вертикальных векторов дают

$$\overset{h}{\nabla}_k e^j_i = e^{\,j}_{ik}\,,\ \overset{v}{\nabla}{}^l_k e^j_i = e^{jl}_{ik} - \delta^j_k e^l_i\,,$$

то есть базисные и слоевые (вертикальные) пфаффовы производные вертикальных векторов являются горизонтальными и вертикальными ковариантными производными вертикальных векторов в связности $\mathcal{T}$.

Для произвольных векторов $u = u^i e_i + u^i_j e^j_i$, $v = v^i e^j_i + v^i_j e^j_i \in T_A L(X_m)$ имеем выражение $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u + T^k_{lij} u^i v^j e^l_k + T^{l\,i}_{skj}(u^k v^j_i - v^k u^j_i) e^s_l$, которое с помощью форм кручения можно записать в виде

$$[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u + \overset{h}{\vartheta}{}^k_l(u, v) e^l_k + \overset{hv}{\vartheta}{}^k_l(u, v) e^s_l \ \text{ или } \ [u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u + \vartheta(u, v)\,,$$

где $\vartheta = \vartheta^i_j e^j_i$ — вертикальнозначная 2-форма кручения.

В частности, справедливы равенства

$$T^{\,k}_{lij} e^l_k = [e_i, e_j] + \overset{h}{\nabla}_j e_i - \overset{h}{\nabla}_i e_j - (x^p_{lj} x^k_{pi} - x^p_{li} x^k_{pj}) e^l_k\,,$$

$$T^{\,s\ j}_{kik} e^l_s = [e_i, e^j_k] + \overset{v}{\nabla}{}^j_k e_i - \overset{h}{\nabla}_i e^j_k - (\delta^s_j x^i_{lk} - \delta^i_l x^s_{jk} - \delta^i_k x^s_{lj}) e^l_s\,,\ 0 = [e^i_j, e^k_l] + \overset{v}{\nabla}{}^k_l e^i_j - \overset{v}{\nabla}{}^i_j e^k_l\,.$$

Вертикальные и горизонтальные ковариантные производные вертикального вектора $u \in T_A L(X_m)$ совпадают с его слоевыми (вертикальными) и базисными пфаффовыми производными, то есть

$$\overset{v}{\nabla}_i u = \hat{u}_i = \partial_{e_i} u\,,\ \overset{h}{\nabla}{}^i_j u = \hat{u}^i_j = \partial_{e^i_j} u\,.$$

Список литературы

1. *Бишоп Р., Криттенден Р.* Геометрия многообразий. М., 1967.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Полякова К. В.* Аналитический и геометрический способы задания аффинной связности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 108—114.

5. *Шапуков Б. Н.* Связности на дифференцируемых расслоениях // Итоги науки и техн. Современ. пробл. Геометрии / ВИНИТИ. М., 1983. Т. 15. С. 61—93.

6. *Do Carmo M.* Differential forms and applications. Berlin, Heidelberg, 1994.

Об авторе

Катерина Валентиновна Полякова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: polyakova_@mail.ru

About the author

Dr Katerina Polyakova, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: polyakova_@mail.ru